Oponentský posudek diplomové práce

Michael Zelina: Věty o pevném bodě v teorii diferenciálních rovnic

Práce se zabývá topologickým stupněm, větami o pevném bodě a jejich aplikacemi na diferenciální rovnice, integrální rovnice a diferenciální inkluze (obyčejné i parciální).

První část práce (kapitoly 2 a 3) se věnuje topologickému stupni a větám o pevném bodě. V kapitole 2 autor zavádí topologický stupeň nejprve v R^d a poté v Banachově prostoru, uvádí jeho vlastnosti (odkazuje na důkazy v literatuře) a doplňuje pěknými elementárními příklady aplikací, tyto příklady jsou v práci řešeny. Třetí kapitola obsahuje věty o pevném bodě (Banachovu, Schauderovu, Browerovu, Kakutaniho a jiné) i s důkazy pomocí topologického stupně až po Kakutaniho–Ky Fanovu větu o pevném bodě pro funkce z K do 2^K. Vše je opět doplněno řešenými příklady. Tato část práce má spíše kompilační charakter, vlastním přínosem autora je kromě uspořádání výsledků vypracování příkladů.

Druhá část práce (4. kapitola) se zabývá aplikacemi na diferenciální rovnice. Nejprve na obyčejné diferenciální rovnice, kde je dokázána mj. existence periodického resp. antiperiodického řešení, poté na parciální diferenciální rovnice (dokázána existence řešení pro nelineární poruchy Poissonovy rovnice) a na integrální rovnice. Nakonec jsou uvedeny tři komplexnější problémy, jejichž vyřešení je hlavním přínosem autora. První je model systému obsahujícího píst a pružinu, u nichž závislost rychlosti resp. výchylky na působící síle je dána nemonotónní funkcí, kterou tedy nelze globálně invertovat. Druhý je Gauseho model dravec kořist se skrýší, který je obyčejnou diferenciální inkluzí. Třetí je parciální diferenciální rovnice s implicitní vazbou, kde je také třeba využít diferenciálních inkluzí.

Co na práci zaujme na první pohled je velký rozsah práce (75 stran) a velmi špatná angličtina (chybějící členy, chybějící podměty, neshoda podmětu s přísudkem, ...). Až do strany 43, kde začínají zmiňované komplexní problémy, není moc matematických chyb — několik překlepů a chyb v argumentaci (je třeba stejnoměrná spojitost namísto spojitosti). Tato část práce je (až na angličtinu) velmi pěkně zpracovaná. Část věnovaná komplexním problémům je také rozumně uspořádaná, ale některé formulace jsou trochu zmatené a také chyb a nejasností v argumentaci je tu více. Zde je seznam (nikoli úplný) nejasností a otázek:

1. V části o integrálních rovnicích se tvrdí, že řešení existuje na celém $[0, +\infty)$, ale v závěru příkladu (str. 42 dole) ukážete pouze existenci maximálního řešení. Lze řešení skutečně prodlužovat až do $+\infty$?
2. Model s nemonotónní závislostí
   (a) Na obrázku 4.1 je graf funkce $x \mapsto f(x)$, která je definovaná na R nebo $t \mapsto f(F(t))$ definované na $[0, T]$?
   (b) Používáte topologický stupeň na funkci z R do R, kde ∂B_r jsou dva body. Není to zbytečné?
   (c) $f : R \to R$, tj. y_k asi nejsou nutně kladná a y_0 by mělo být $-\infty$ (obrázky ale

naznačují, že $y_k > 0$).

(d) Asi se předpokládá, že $f' = 0$ pouze v bodech lokálních extrémů, ale nikde jsem tento předpoklad nenašel (jinak není pravda, že f' je odražená od nuly na jednotlivých větvích B_k).

(e) Důkaz, že sjednocení obrazů větví B^k je celé R není dokončen (chybí odhad $M^0 > m_{s+1}$) a ani toto tvrzení není nikde vysloveno, takže dále není jasné, že opravdu můžeme definovat $F(0)$.

(f) Není vysvětleno, proč jsou splněny předpoklady Arzelaovy–Ascoliho věty na straně 51. Proč?

(g) Není pravda, že $x(t)$ leží na hranici větve jen pokud má F v bodě t skok (pokud x je konstantní na nějakém intervalu). Větve by asi měly být otevřené, tím by se některé problémy, např. tento vyřešily.

3. Model dravec–kořist

   (a) Proč můžeme přejít k limitě v nerovnosti $(x_0 - x)(\tilde{\varphi}_0 - \tilde{\varphi}_n) \geq 0$, když víme, že $\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}$ v L^2?

   (b) Proč má $\beta : L^2 \to 2^{L^2}$ maximální monotónní graf? Výše dokazujete tuto skutečnost pro graf v R^2, kde je to celkem jasné. Pro funkci β mi to přijde méně jasné.

   (c) Proč je splněna první soustava na straně 56?

4. PDR s vazbou

   (a) Opět není vysvětleno, proč má β monotónní graf.

   (b) V důkazu maximality monotónního grafu se sčítají čísla s funkcemi a není jasné, zda se mluví o součinu čísel nebo L^2-součinu funkcí.

I přes výše uvedené nedostatky **předložená práce splňuje požadavky kladené na diplomovou práci.**

V Praze dne 12.6.2020,

doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.